

* Gọi n là nồng độ trà ở cốc 1 lúc ban đầu, khi đổ Δm từ cốc 1 sang cốc 2 thì nồng độ trà ở cốc 2 là:

$$n_2 = \frac{\Delta m \cdot n}{m_2 + \Delta m} = \frac{n}{1 + \frac{1}{x_2}}; \quad \left(x_2 = \frac{\Delta m}{m_2} \right) \quad (3.1)$$

Đổ trở lại cốc thứ nhất lượng Δm nước trà với nồng độ n_2 thì nồng độ nước trà ở cốc 1 trở thành

$$n_1 = \frac{(m_1 - \Delta m)n + \Delta m \cdot n_2}{(m_1 - \Delta m) + \Delta m} = (1 - x_1)n + \frac{x_1 x_2}{1 + x_2} n \quad (3.2)$$

Theo đề bài: $n_1 = k \cdot n_2 = \frac{k x_2}{1 + x_2} n$

$$\Rightarrow \frac{k x_2}{1 + x_2} = (1 - x_1) + \frac{x_1 \cdot x_2}{1 + x_2} \quad \Rightarrow \quad k = 1 + \frac{1 - x_1}{x_2} \quad (I)$$

* Gọi t_1' và t_2' là nhiệt độ cuối cùng của nước trà trong cốc 1 và cốc 2.

+ Khi đổ Δm từ cốc 1 sang cốc 2, ta có phương trình cân bằng nhiệt

$$\begin{aligned} \Delta m c(t_1 - t_2') &= m_2 c(t_2' - t_2) \\ \Rightarrow t_2' &= \frac{\Delta m \cdot t_1 + m_2 t_2}{m_2 + \Delta m} = \frac{m_2 t_1 + \Delta m \cdot t_1 + m_2 t_2 - m_2 t_1}{m_2 + \Delta m} = t_1 + \frac{m_2(t_2 - t_1)}{m_2 + \Delta m} \\ \Rightarrow t_2' &= t_1 - \frac{t_1 - t_2}{1 + x_2} \end{aligned} \quad (3.3)$$

+ Khi đổ Δm từ cốc 2 trở lại cốc 1 thì

$$\begin{aligned} \Delta m c(t_1' - t_2') &= (m_1 - \Delta m) c(t_1 - t_1') \\ \Rightarrow t_1' &= \frac{(m_1 - \Delta m)t_1 + \Delta m t_2}{m_1} = t_1 + \frac{\Delta m}{m_1} (t_2 - t_1) = t_1 - x_1 (t_1 - t_2) \\ \Rightarrow t_1' &= t_1 - \frac{x_1 (t_1 - t_2)}{1 + x_2} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Từ đó: $\Delta t_0 = t_1' - t_2' = \frac{1 - x_1}{1 + x_2} (t_1 - t_2) \quad (II)$

Thay số vào (I) và (II):

$$\begin{cases} 1,5 = \frac{1 - x_1}{x_2} \\ \frac{3}{8} = \frac{1 - x_1}{1 + x_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{\Delta m}{m_1} = \frac{1}{2} \\ x_2 = \frac{\Delta m}{m_2} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Từ (1) và (2), ta cũng nhận thấy khi tăng Δm (hay tăng x_1 và x_2) thì k và Δt_0 càng nhỏ (chênh lệch nồng độ và nhiệt độ sau khi pha giảm), một điều ai cũng có thể cảm nhận được từ thực tế